APLICACIONES DE LA DERIVADA

RECTA TANGENTE

EJERCICIO 1 : Escribe la ecuación de la recta tangente a la curva $f(x)=\dfrac{x^2+1}{e^x}$ en $x_0=0$.

Solución:

- Ordenada del punto: $f(0)=1$
- Pendiente de la recta: $f'(x)=\dfrac{2xe^x-\left(x^2+1\right)\cdot e^x}{(e^x)^2}=\dfrac{e^x\left(2x-x^2-1\right)}{(e^x)^2}=\dfrac{2x-x^2-1}{e^x}\Rightarrow f'(0)=-1$
- Ecuación de la recta tangente: $y-1=-1(x-0) \rightarrow y=-x+1$

EJERCICIO 2 : Escribe las ecuaciones de la rectas tangentes a la curva $x^2-3y^2+2x+9=0$ en $x_0=1$.

Solución:

- Ordenadas de los puntos: $1-3y^2+2+9=0 \rightarrow 12=3y^2 \rightarrow 4=y^2 \rightarrow \begin{cases} y=-2 \\ y=2 \end{cases}$

  Hay dos puntos: $(1,-2)$ y $(1,2)$

- Pendientes de las rectas: $2x-6y\cdot y'+2=0 \Rightarrow y'=\dfrac{-2-2x}{-6y} \rightarrow y'=\dfrac{1+x}{3y}$

  $y'(1,-2)=\dfrac{1+1}{-6}=\dfrac{2}{-6}=\dfrac{-1}{3}$ $\qquad$ $y'(1,2)=\dfrac{1+1}{6}=\dfrac{2}{6}=\dfrac{1}{3}$

- Ecuaciones de las rectas tangentes:

-En $(1,-2) \rightarrow y=-2-\dfrac{1}{3}(x-1) \rightarrow y=\dfrac{-1}{3}x-\dfrac{5}{3}$

-En $(1,2) \rightarrow y=2+\dfrac{1}{3}(x-1) \rightarrow y=\dfrac{1}{3}x+\dfrac{5}{3}$

EJERCICIO 3 : Halla la ecuación de la recta tangente a la curva $y=\dfrac{x^2(x-1)}{\sqrt{x+1}}$ en $x_0=3$.

Solución:

- Ordenada en el punto: $y(3)=9$
- Pendiente de la recta: $y=\dfrac{x^2(x-1)}{\sqrt{x+1}}=\dfrac{x^3-x^2}{\sqrt{x+1}}\Rightarrow$

$$y'=\frac{\left(3x^2-2x\right)\sqrt{x+1}-\left(x^3-x^2\right)\cdot\dfrac{1}{2\sqrt{x+1}}}{(x+1)}=\frac{2\left(3x^2-2x\right)(x+1)-\left(x^3-x^2\right)}{2\sqrt{(x+1)^3}}==\frac{5x^3+3x^2-4x}{2\sqrt{(x+1)^3}}\Rightarrow y'(3)=$$

- Ecuación de la recta tangente: $y=9+\dfrac{75}{8}(x-3) \rightarrow y=\dfrac{75}{8}x-\dfrac{153}{8}$

EJERCICIO 4 : Halla los intervalos de crecimiento y los máximos y mínimos de la función: $f(x)=\dfrac{3x^2-9x+3}{3x-1}$

Solución:

$$f'(x)=\frac{(6x-9)\,(3x-1)-\left(3x^2-9x+3\right)3}{(3x-1)^2}=\frac{18x^2-6x-27x+9-9x^2+27x-9}{(3x-1)^2}==\frac{9x^2-6x}{(3x-1)^2}$$

$$f'(x)=0 \quad\rightarrow\quad 9x^2-6x=0 \quad\rightarrow\quad 3x\,(3x-2)=0 \quad\rightarrow\quad \begin{cases} 3x=0 \quad\rightarrow\quad x=0 \\ 3x-2=0 \quad\rightarrow\quad x=\dfrac{2}{3}\end{cases}$$

Signo de $f'(x)$:

$f'>0$		$f'<0$		$f'>0$
$\nearrow$	0	$\searrow$	$\frac{2}{3}$	$\nearrow$

$f(x)$ es creciente en $(-\infty,\,0)\cup\left(\dfrac{2}{3},\,+\infty\right)$; es decreciente en $\left(0,\,\dfrac{2}{3}\right)$. Tiene un máximo en $(0,\,-3)$ y un mínimo en $\left(\dfrac{2}{3},\,\dfrac{-5}{3}\right)$.

EJERCICIO 5 : Halla los máximos, mínimos y puntos de inflexión de la curva: $f(x)=5x^2\,(x-1)^2$
Di dónde es creciente, decreciente, cóncava y convexa.

Solución:

- Primera derivada: $f'(x)=10x\,(x-1)^2+5x^2\cdot 2\,(x-1)=10x\,(x-1)^2+10x^2\,(x-1)=$

$$=10x\,(x-1)\,(x-1+x)=10x\,(x-1)\,(2x-1)\Rightarrow\; f'(x)=0\;\begin{cases} x=0 \\ x=1 \\ x=\dfrac{1}{2}\end{cases}$$

Signo de $f'(x)$:

$f'<0$		$f'>0$		$f'<0$		$f'>0$
$\searrow$	0	$\nearrow$	$\frac{1}{2}$	$\searrow$	1	$\nearrow$

$f(x)$ es decreciente en $(-\infty,\,0)\cup\left(\dfrac{1}{2},\,1\right)$; es creciente en $\left(0,\,\dfrac{1}{2}\right)\cup(1,\,+\infty)$. Tiene un máximo en $\left(\dfrac{1}{2},\,\dfrac{5}{16}\right)$ y dos mínimos: $(0,\,0)$ y $(1,\,0)$.

- Segunda derivada:

$f'(x)=10x\,(x-1)\,(2x-1)=20x^3-30x^2+10x$
$f''(x)=60x^2-60x+10=10\,(6x^2-6x+1)$

$$f''(x)=0 \quad\rightarrow\quad 6x^2-6x+1=0 \quad\rightarrow\quad x=\frac{6\pm\sqrt{36-24}}{12}=\frac{6\pm\sqrt{12}}{12} \quad\rightarrow\quad \begin{cases} x\approx 0{,}21 \\ x\approx 0{,}79\end{cases}$$

Signo de $f''(x)$:

$f''>0$		$f''<0$		$f''>0$
$\smile$	$0{,}21$	$\frown$	$0{,}79$	$\smile$

$f(x)$ es cóncava en $(-\infty;\,0{,}21)\cup(0{,}79;\,+\infty)$; es convexa en $(0{,}21;\,0{,}79)$. Tiene dos puntos de inflexión: $(0{,}21;\,0{,}14)$ y $(0{,}79;\,0{,}14)$.

CÁLCULO DE PARÁMETROS

EJERCICIO 6 : Halla los valores de a y b en la función f(x) = x^2 + ax + b sabiendo que pasa por el punto P(-2,1) y tiene un extremo relativo en el punto de abscisa x = -3

Solución:

Si pasa por el punto *(-2, 1)*$\Rightarrow$*f(-2) = 1* $\Rightarrow (-2)^2 + a(-2) - b = 1 \Rightarrow\ -a-b=-3$

Como tiene un extremo para $x = -3 \Rightarrow$ f'(-3) = 0 $\Rightarrow\ f'(x) = 2x + a\ \Rightarrow\ 2(-3)+a=0\ \Rightarrow\ a = 6$

Resolviendo el sistema: Como a = 6 , b = -3

EJERCICIO 7 : Halla a, b y c en la función f(x) = $ax^3 + bx^2 + cx + d$ sabiendo que el punto P(0,4) es un máximo y el punto Q(2,0) es un mínimo.

Solución:

$$\text{Máximo en } P(0,4) \Rightarrow \begin{cases} \text{Pasa por el punto } (0,4)\ \Rightarrow f(0)=4 \Rightarrow a.0^3+b.0^2+c.0+d=4 \Rightarrow d=4 \\ \text{Máximo en } x=0 \Rightarrow \begin{cases} f'(0)=0 \\ f'(x)=3ax^2+2bx+c \end{cases} \Rightarrow\ 3a.0^2+2b.0+c=0 \Rightarrow c=0 \end{cases}$$

$$\text{Mínimo en } Q(2,0) \Rightarrow \begin{cases} \text{Pasa por el punto } (2,0)\ \Rightarrow f(2)=0 \Rightarrow a.2^3+b.2^2+c.2+d=0 \Rightarrow 8a+4b+2c+d=0 \\ \text{Mínimo en } x=2 \Rightarrow \begin{cases} f'(2)=0 \\ f'(x)=3ax^2+2bx+c \end{cases} \Rightarrow\ 3a.2^2+2b.2+c=0 \Rightarrow 12a+4b+c=0 \end{cases}$$

Formando un sistema con las 4 ecuaciones obtenidas resulta:

$$\begin{cases} d=4 \\ 8a+4b+2c+d=0 \\ c=0 \\ 12a+4b+c=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 8a+4b=-4 \\ 12a+4b=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2a+b=-1 \\ 3a+b=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -2a-b=1 \\ 3a+b=0 \end{cases} \Rightarrow\ a=1;\ b=-3$$

PROBLEMAS DE OPTIMIZACIÓN

EJERCICIO 8 : La suma de tres números positivos es 60. El primero más el doble del segundo más el triple del tercero suman 120. Halla los números que verifican estas condiciones y cuyo producto es máximo.

Solución:

Llamamos x al primer número, y al segundo y z al tercero. Así, tenemos que:

$$\left.\begin{array}{l} x+y+z=60 \quad (x,\ y,\ z>0) \\ x+2y+3z=120 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} x+y=60-z \\ x+2y=120-3z \end{array}\right\} \begin{array}{l} x=z \\ y=60-2z \end{array}$$

El producto de los tres números es: $P = x \cdot y \cdot z = z \cdot (60-2z) \cdot z\ = z^2\,(60-2z) = f(z),\ z>0$

Buscamos z para que $f(z)$ sea máximo:

$$f'(z) = 2z\,(60-2z) + z^2 \cdot (-2) = 2z\,(60-2z-z) = 2z\,(60-3z) = 120z - 6z^2$$

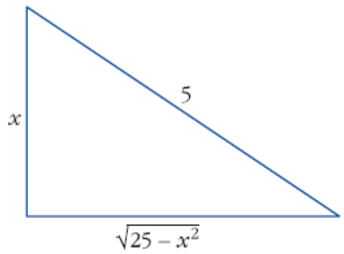
$$f'(z)=0 \quad \rightarrow \quad \begin{cases} z=0 \ \ (\text{no vale, pues ha de ser } z>0). \\ z=20 \end{cases}$$

Veamos que en $z=20$ hay un máximo:$f''(z) = 120 - 12z$; $f''(20) = -120 < 0 \quad \rightarrow$ hay un máximo

Por tanto, el producto es máximo para $x = 20,\ y = 20,\ z = 20.$

EJERCICIO 9 : Entre todos los triángulos rectángulos de hipotenusa 5 metros, determina razonadamente el que tiene área máxima.

Solución:



$$\text{Área} = \frac{x\sqrt{25-x^2}}{2} = f(x),\ \ 0 < x < 5$$

Buscamos x para que el área sea máxima: $f(x) = \dfrac{\sqrt{25x^2 - x^4}}{2}$

$$f'(x) = \frac{50x - 4x^3}{4\sqrt{25x^2 - x^4}} = \frac{25x - 2x^3}{2\sqrt{25x^2 - x^4}} = \frac{x\left(25 - 2x^2\right)}{2x\sqrt{25 - x^2}} = \frac{25 - 2x^2}{2\sqrt{25 - x^2}}$$

$$f'(x) = 0 \quad \rightarrow \quad 25 - 2x^2 = 0 \quad \rightarrow \quad x^2 = \frac{25}{2} \quad \rightarrow \quad \begin{cases} x = -\dfrac{5\sqrt{2}}{2} \ \text{(no vale)} \\[2ex] x = \dfrac{5\sqrt{2}}{2} \end{cases}$$

(Como $f'(x) > 0$ a la izquierda de $x = \dfrac{5\sqrt{2}}{2}$ y $f'(x) < 0$ a su derecha, en $x = \dfrac{5\sqrt{2}}{2}$ hay un máximo).

Por tanto, el área es máxima cuando los dos catetos miden $x = \dfrac{5\sqrt{2}}{2}$ metros.

EJERCICIO 10 : Un móvil se desplaza según la función: $e(t) = 600t + 150t^3 - 115t^4 + 27t^5 - 2t^6$, que nos da el espacio en metros recorrido por el móvil en t minutos.
Determina a cuántos metros de la salida está el punto en el que alcanza la máxima velocidad.

Solución:
La función que nos da la velocidad es la derivada de $e(t)$:

$$e'(t) = 600 + 450t^2 - 460t^3 + 135t^4 - 12t^5 = v(t)$$

Para obtener el máximo de la velocidad, derivamos $v(t)$:

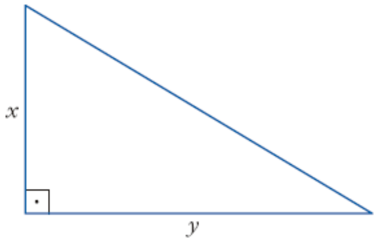
$$v'(t) = 900t - 1\,380t^2 + 540t^3 - 60t^4 = 60t\,(15 - 23t + 9t^2 - t^3) = -60t\,(t-1)\,(t-3)\,(t-5)$$

$$v'(t) = 0 \quad \rightarrow \quad t = 0,\ t = 1,\ t = 3,\ t = 5$$

Obtenemos el valor de $v(t)$ en estos puntos: $v(0) = 600$, $v(1) = 713$, $v(3) = 249$, $v(5) = 1\,225$
Por tanto, la máxima velocidad se alcanza en el minuto $t = 5$ y el espacio recorrido es
$e(5) = 3\,000$ m.

<u>EJERCICIO 12</u> : Entre todos los triángulos rectángulos de área 5 cm^2, determina las longitudes de los lados que tiene la hipotenusa mínima.

Solución:



$$\text{Área} = x \cdot y = 10 \quad \rightarrow \quad y = \frac{10}{x}, \ \ x > 0$$

$$\text{Hipotenusa} = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{x^2 + \frac{100}{x^2}}$$

Buscamos el valor de $x > 0$ que hace mínima la función: $f(x) = \sqrt{x^2 + \dfrac{100}{x^2}}$

Derivamos:

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x^2 + \frac{100}{x^2}}} \cdot \left(2x - \frac{200}{x^3}\right)$$

$$f'(x) = 0 \quad \rightarrow \quad 2x - \frac{200}{x^3} = 0 \quad \rightarrow \quad 2x^4 - 200 = 0 \quad \rightarrow \quad x^4 = 100 \quad \rightarrow \rightarrow \quad x = \sqrt[4]{100} = \sqrt{10} \quad \rightarrow \quad y = \sqrt{10}$$

(Como $f'(x) < 0$ a la izquiera de $\sqrt{10}$ y $f'(x) > 0$ a su derecha, en $x = \sqrt{10}$ hay un mínimo).

Por tanto, los catetos miden $\sqrt{10}$ cm cada uno; y la hipotenusa medirá $\sqrt{20}$ cm.

CÁLCULO DE LÍMITES

<u>EJERCICIO 13</u> : Calcular los siguientes límites:

a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x - 1}{x + \operatorname{sen} x}$ **b)** $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x \operatorname{sen} x}{x^3 + 3x^2}$ **c)** $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{2x - 2\operatorname{sen} x}{x + \operatorname{sen} x}$ **d)** $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{4 - 4\cos x}{x^2}$ **e)** $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^3}{x\cos x + \operatorname{sen} x}$

f) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{a^x - b^x}{x}$ **g)** $\lim\limits_{x\to 0^+} (xLx)$ **h)** $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x - \operatorname{sen} x}{\operatorname{sen}^2 x}$ **i)** $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x \operatorname{sen} x}{1 - \cos x}$ **j)** $\lim\limits_{x\to 0^+} x^x$ **k)** $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x - e^{-x} - 2x}{x - \operatorname{sen} x}$

Solución:

a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x - 1}{x + \operatorname{sen} x} = \left(\dfrac{0}{0}\right) \overset{L'H}{=} \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x}{1 + \cos x} = \dfrac{1}{2}$

b) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x \operatorname{sen} x}{x^3 + 3x^2} = \left(\dfrac{0}{0}\right) \overset{L'H}{=} \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sen} x + x\cos x}{3x^2 + 6x} = \left(\dfrac{0}{0}\right) \overset{L'H}{=} \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cos x + \cos x - x \operatorname{sen} x}{6x + 6} = \dfrac{2}{6} = \dfrac{1}{3}$

c) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{2x - 2\operatorname{sen} x}{x + \operatorname{sen} x} = \left(\dfrac{0}{0}\right) \overset{L'H}{=} \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{2 - 2\cos x}{1 + \cos x} = \dfrac{2 - 2}{1 + 1} = 0$

d) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{4 - 4\cos x}{x^2} = \left(\dfrac{0}{0}\right) \overset{L'H}{=} \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{4\operatorname{sen} x}{2x} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{2\operatorname{sen} x}{x} = \left(\dfrac{0}{0}\right) \overset{L'H}{=} \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{2\cos x}{1} = 2$

e) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^3}{x\cos x + \operatorname{sen} x} = \left(\dfrac{0}{0}\right) \overset{L'H}{=} \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{3x^2}{\cos x - x \operatorname{sen} x + \cos x} = \dfrac{0}{2} = 0$

f) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{a^x - b^x}{x} = \left(\dfrac{a^0 - b^0}{0} = \dfrac{1 - 1}{0} = \dfrac{0}{0}\right) = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{a^x.La - b^x.Lb}{1} = \lim\limits_{x\to 0}(a^x La - b^x Lb) = a^0 La - b^0 Lb = La - Lb$

g) $\lim\limits_{x\to 0^+} (xLx) = (0.\infty) = \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{Lx}{1/x} = \left(\dfrac{\infty}{\infty}\right) = \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{1/x}{-1/x^2} = \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{x^2}{-x} = \lim\limits_{x\to 0^+}(-x) = 0$

h) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\operatorname{sen}x}{\operatorname{sen}^2 x}=\left(\dfrac{0}{0}\right)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{2\operatorname{sen}x.\cos x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{\operatorname{sen}2x}=\left(\dfrac{0}{0}\right)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{sen}x}{\cos 2x.2}=\dfrac{0}{2}=0$

i) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\operatorname{sen}x}{1-\cos x}=\left(\dfrac{0}{0}\right)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1.\operatorname{sen}x+x\cos x}{\operatorname{sen}x}=\left(\dfrac{0}{0}\right)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x+1.\cos x+(-\operatorname{sen}x).x}{\cos x}=\dfrac{2}{1}=2$

j) $\lim\limits_{x\to 0^+}x^x=\lim\limits_{x\to 0^+}e^{Lnx^x}=\lim\limits_{x\to 0^+}e^{x.Lnx}=\lim\limits_{x\to 0^+}e^{\frac{Lnx}{1/x}}=e^{\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{Lnx}{1/x}}\overset{L'H}{=}e^{\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{1/x}{-1/x^2}}=e^{\lim\limits_{x\to 0^+}-x}=e^0=1$

k) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-e^{-x}-2x}{x-\operatorname{sen}x}=\left(\dfrac{0}{0}\right)=\lim\dfrac{e^x+e^{-x}-2}{\underset{x\to 0}{1-\cos x}}=\left(\dfrac{0}{0}\right)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-e^{-x}}{\operatorname{sen}x}=\left(\dfrac{0}{0}\right)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x+e^{-x}}{\cos x}=2$

TEOREMAS DE DERIVABILIDAD

EJERCICIO 14 : Comprueba que la función $f(x)=x^2+2x-1$ cumple las hipótesis del teorema de Rolle en el intervalo $[-3, 1]$. ¿Dónde cumple la tesis?

Solución:

- La función $f(x)=x^2+2x-1$ es continua y derivable en todo **R**; por tanto, será continua en $[-3, 1]$ y derivable en $(-3, 1)$.
- Además: $\left.\begin{cases} f(-3)=2 \\ f(1)=2 \end{cases}\right\}$ son iguales.
- Por tanto, se cumplen las hipótesis del teorema de Rolle. Así, sabemos que existe

$c\in(-3, 1)$ tal que $f'(c)=0$.

- Veamos dónde se cumple la tesis; $f'(x)=2x+2 \;\to\; f'(c)=2x+2 \;\to\; c=-1\in(-3, 1)$

EJERCICIO 15 : Calcula m y n para que la función: $f(x)=\begin{cases} 3x^2-2x+m & \text{si } x\le 1 \\ nx-2 & \text{si } x>1 \end{cases}$

cumpla las hipótesis del teorema del valor medio en el intervalo $[0, 2]$. ¿Dónde cumple la tesis?

Solución:

- Continuidad en $[0, 2]$:

- Si $x\ne 1$, la función es continua, pues está formada por polinomios, que son funciones continuas.

- En $x=1$: $\begin{cases} \lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-}\left(3x^2-2x+m\right)=1+m \\ \lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+}(nx-2)=n-2 \\ f(1)=1+m \end{cases}$ $\Rightarrow$ Para que sea continua en, ha de ser $1+m=n-2$

- Derivabilidad en $(0, 2)$:

- Si $x\ne 1$, la función es derivable, y su derivada es: $f'(x)=\begin{cases} 6x-2 & \text{si } x<1 \\ n & \text{si } x>1 \end{cases}$

- Para que sea derivable en $x=1$, han de coincidir las derivadas laterales: $\left.\begin{matrix} f'(1^-)=4 \\ f'(1^+)=n \end{matrix}\right\}$ $n=4$

- Por tanto, $f(x)$ cumplirá las hipótesis del teorema del valor medio en $[0, 2]$ si:

$\begin{cases} 1+m=n-2 \\ n=4 \end{cases}$ $\begin{cases} m=1 \\ n=4 \end{cases}$

Este caso quedaría: $f(x)=\begin{cases} 3x^2-2x+1 & \text{si } x\le 1 \\ 4x-2 & \text{si } x>1 \end{cases}$ $f'(x)=\begin{cases} 6x-2 & \text{si } x\le 1 \\ 4 & \text{si } x>1 \end{cases}$

Veamos dónde cumple la tesis:

$f'(c)=\dfrac{f(2)-f(0)}{2-0}=\dfrac{6-1}{2}=\dfrac{5}{2}\Rightarrow f'(c)=6c-2=\dfrac{5}{2} \;\to\; c=\dfrac{3}{4}\in(0,2)$ (si $c>1$)

EJERCICIO 16 : Comprueba que la función: $\mathbf{f(x)=\begin{cases}-x^2+1 & \text{si} \quad x\le 2\\ -4x+5 & \text{si} \quad x>2\end{cases}}$

satisface las hipótesis del teorema del valor medio en el intervalo [0, 3]. ¿Dónde cumple la tesis?

Solución:

- Continuidad en $[0, 3]$:

- Si $x \neq 2$, la función es continua, pues está formada por polinomios, que son funciones continuas.

- En $x = 2$: $\left.\begin{cases}\lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 2^-} \left(-x^2+1\right) = -3\\ \lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 2^+} (-4x+5) = -3\\ f(2) = -3\end{cases}\right\}$ $\lim\limits_{x\to 2} f(x) = f(2)$ $\quad f(x)$ es continua en $x = 2$.

Por tanto, $f(x)$ es continua en $[0, 3]$.

- Derivabilidad en $(0, 3)$:

- Si $x \neq 2$, la función es derivable, y su derivada es: $f'(x)=\begin{cases}-2x & \text{si} \quad x<2\\ -4 & \text{si} \quad x>2\end{cases}$

- En $x = 2$, como $f'(2^-) = f'(2^+) = -4$, también es derivable; y $f'(2) = -4$.

Por tanto, $f(x)$ es derivable en $(0, 3)$.

- Se cumplen las hipótesis del teorema del valor medio en $[0, 3]$; por tanto, existe $c \in (0, 3)$ tal que: $f'(c) = \dfrac{f(3)-f(0)}{3-0} = \dfrac{-7-1}{3-0} = \dfrac{-8}{3}$

Veamos dónde se cumple la tesis: $-2x = \dfrac{-8}{3} \;\rightarrow\; x = \dfrac{4}{3} \;\rightarrow\; c = \dfrac{4}{3} \in (0, 3)$

EJERCICIO 17 : Calcula los valores de a, b **y** c **para que la función:** $\mathbf{f(x)=\begin{cases}x^2+ax & \text{si} \quad -2\le x<1\\ bx+c & \text{si} \quad 1\le x\le 2\end{cases}}$

cumpla las hipótesis del teorema de Rolle en el intervalo [−2, 2]. ¿Qué asegura el teorema en este caso?

Solución:

- Continuidad en $[-2, 2]$:

- Si $x \neq 1$, la función es continua, pues está formada por polinomios, que son funciones continuas.

- En $x = 1$: $\begin{cases}\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^-} \left(x^2+ax\right) = 1+a\\ \lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^+} (bx+c) = b+c\\ f(1) = b+c\end{cases}$ $\Rightarrow$ Para que sea continua en $x = 1$, ha de ser $1 + a = b + c$.

- Derivabilidad en $(-2, 2)$:

- Si $x \neq 1$, la función es derivable, y su derivada es: $f'(x)=\begin{cases}2x+a & \text{si} \quad -2<x<1\\ b & \text{si} \quad 1<x<2\end{cases}$

- En $x = 1$, han de ser iguales las derivadas laterales: $\left.\begin{matrix}f'\left(1^-\right) = 2+a\\ f'\left(1^+\right) = b\end{matrix}\right\}$ $2+a=b$

- Además, debe ser $f(-2) = f(2)$; es decir: $4 - 2a = 2b + c$

- Uniendo las condiciones anteriores, tenemos que: $\left.\begin{matrix}1+a=b+c\\ 2+a=b\\ 4-2a=2b+c\end{matrix}\right\}$ $\begin{matrix}a=\dfrac{1}{4}\\ b=\dfrac{9}{4}\\ c=-1\end{matrix}$

- En este caso, el teorema de Rolle asegura que existe $c \in (-2, 2)$ tal que $f'(c) = 0$.

EJERCICIO 18 : **Comprueba que la función $f(x) = 3x^2 - 6x + 7$ cumple las hipótesis del teorema del valor medio en el intervalo $[-1, 2]$. ¿Dónde cumple la tesis?**

Solución:

- La función $f(x) = 3x^2 - 6x + 7$ es continua y derivable en $\mathbf{R}$; por tanto, será continua en $[-1, 2]$ y derivable en $(-2, 1)$. Luego, cumple las hipótesis del teorema del valor medio.
- Entonces, existe $c \in (-1, 2)$ tal que: $f'(c) = \dfrac{f(2) - f(1)}{2 - (-1)} = \dfrac{7 - 16}{2 + 1} = \dfrac{-9}{3} = -3$

Veamos cuál es el valor de c en el que se cumple la tesis; $f'(x) = 6x - 6 \rightarrow f'(c) = 6c - 6 = -3 \rightarrow 6c = 3 \Rightarrow$

$c = \dfrac{3}{6} = \dfrac{1}{2}$. La tesis se cumple en $c = \dfrac{1}{2} \in (-1, 2)$

EJERCICIO 19 : **La función f: $[-1,1] \rightarrow R$ definida por $f(x) = \sqrt[3]{x^2}$ toma el valor en los extremos del intervalo, $f(-1) = 1$; $f(1) = 1$. Encontrar su derivada y comprobar que no se anula nunca. ¿Contradice esto el teorema de Rolle?**

Solución:

1) ¿ f continua en [-1,1]?: Cierto porque f es continua en todo R

2) ¿f derivable en (-1,1)? : $f'(x) = \dfrac{2}{3} \cdot \dfrac{1}{\sqrt[3]{x}} \Rightarrow$ Falsa porque f no se derivable en $x = 0 \Rightarrow$ No es cierta

Esto no contradice el teorema de Rolle porque la segunda hipótesis no se verifica.

EJERCICIO 20 : **Calcula b para que la función $f(x) = x^3 - 4x + 3$ cumpla las hipótesis del teorema de Rolle en el intervalo [0,b]. ¿Dónde se cumple la tesis?**

Solución:

1) ¿f continua en [0,b]?: Cierto porque f es continua en todo R.

2) ¿f derivable en (0,b)?: $f'(x) = 3x^2 - 4$ cierto porque f es derivable en todo R

3) ¿f(0) = f(b)?:

$f(0) = 3$; $f(b) = b^3 - 4b + 3 = 3 \Rightarrow b^3 - 4b = 0 \Rightarrow b(b^2 - 4) = 0$

Cuyas soluciones son b = 0; b = 2; b = -2 : La única solución válida es b = 2.

¿Dónde se cumple la tesis?: $f'(x) = 3x^2 - 4$; $f'(c) = 3c^2 - 4 = 0 \Rightarrow c = 2/\sqrt{3}$

EJERCICIO 21 : **Comprueba que la función $f(x) = \begin{cases} 2x + 2 & \text{si } -1/2 \le x < 1 \\ 5-(x-2)^2 & \text{si } 1 \le x \le 4 \end{cases}$ cumple las hipótesis del Teorema de Rolle. Si las cumple, averiguar dónde cumple la tesis**

Solución:

1) ¿f continua en [-1/2,4]?

f continua en $[-1/2,4] - \{1\}$ por composición de funciones continuas

En x = 1

$$\lim_{x\to 1} f(x) = \begin{cases} \lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^-} (2x + 2) = 4 \\ \lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^+} \left[5 - (x - 2)^2\right] = 4 \end{cases}$$

$f(1) = 5 - (1 - 2)^2 = 4$

Por tanto f continua en x = 1. Por tanto f continua en [-1/2,4] y se cumple la primera hipótesis

2) ¿f derivable en (-1/2,4)?

$$f'(x)=\begin{cases}2 & \text{si} \quad -\frac{1}{2}\le x<1\\ -2x+4 & \text{si} \quad 1\le x\le 4\end{cases}$$

f derivable en (-1/2,4) – {1} por composición de funciones derivables.

En x = 1:

$$f'(1^-)=2$$

$$f'(1^+)=-2.1+4=2$$

Las derivadas laterales son iguales, luego es derivable en $x = 1$

Por tanto es derivable en (-1/2,4) y se cumple la 2ª hipótesis.

3) ¿f (-1/2) = f(4)?

$$f(-\tfrac{1}{2})=2(-\frac{1}{2})+2=1$$

$$f(4)=-4^2+4.4+1=1$$

Como toma el mismo valor en los extremos del intervalo, se cumple la 3ª hipótesis.

Por tanto cumple las hipótesis del Teorema de Rolle.

Veamos dónde se verifica la tesis: $c \in (-1/2,4)$ tal que f ´(c) = 0

$$f'(c)=\begin{cases}2 & \text{si} \quad -\frac{1}{2}\le c<1\\ -2c+4 & \text{si} \quad 1\le c\le 4\end{cases}$$

Haciendo $f'(c)=0$, resulta:

0 = 2 que es absurdo.

0 = –2c + 4, es decir, *c = 2, porque pertenece a (-1/2,4)*

La tesis se verifica en c = 2

<u>EJERCICIO 22</u> : Siendo $f(x) = (x-2)^2(x+1)$, hallar un número c, en el intervalo (0,4) de modo que se verifique el teorema del valor medio.

Solución: Como es una función polinómica, es continua y derivable en todo R, luego podemos aplicar el teorema:

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(c)\Rightarrow \frac{f(4)-f(0)}{4-0}=f'(c)$$

$f(4) = (4-2)^2(4+1) = 20$

$f(0) = (0-2)^2(0+1) = 4$

$f´(x) = 2(x-2)(x+1) + 1.(x-2)^2 = (x-2)[2(x+1) + (x-2)] = (x-2)3x \Rightarrow f´(c) = (c-2)3c$

$$\frac{20-4}{4-0}=(c-2)3c \Rightarrow 3c^2-6c=4 \Rightarrow 3c^2-6c-4=0$$

$$c=\frac{6\pm\sqrt{36+48}}{6}=\frac{6\pm\sqrt{84}}{6}=\frac{6\pm2\sqrt{21}}{6}=\begin{cases}1+\sqrt{21}/3\\ 1-\sqrt{21}/3\end{cases}$$ *La solución válida es la 1ª porque tiene que estar entre 0 y 4*

<u>EJERCICIO 23</u> : Prueba que la función $f(x)=\begin{cases}\dfrac{3-x^2}{2} & \text{si} \quad x<1\\ \dfrac{1}{x} & \text{si} \quad x\ge 1\end{cases}$ satisface las hipótesis del teorema del valor medio en el intervalo [0,2] y calcula el o los valores vaticinados por el teorema.

Solución:

1) ¿f continua en [0,2]?

f continua en [0,2] – {1}
En x = 1

$$\lim_{x\to 1} f(x) = \begin{cases} \lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1} \frac{3-x^2}{2} = \frac{3-1^2}{2} = 1 \\ \lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1} \frac{1}{x} = \frac{1}{1} = 1 \end{cases} \Rightarrow \text{Por tanto f continua en } x = 1$$

$f(1) = 1/1 = 1$

f continua en [0,2] y se cumple la primera hipótesis

2) ¿f derivable en (0,2)? $f'(x) = \begin{cases} -x & \text{si } x < 1 \\ \frac{-1}{x^2} & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$

f derivable en (0,2) – {1} por composición de funciones derivables.
En x = 1

$f'(1^-) = -1$

$f'(1^+) = -1$

f derivable en x = 1
Por tanto derivable en (0,2) y se cumplen la segunda hipótesis
Satisface las dos hipótesis del teorema del valor medio

Tesis: Existe un c ∈ (0,2) tal que : $\frac{f(2)-f(0)}{2-0} = f'(c)$

f(2) = 1/2 ; f(0) = 3/2 , $f'(c) = \begin{cases} -c & \text{si } c < 1 \\ -1/c^2 & \text{si } c \geq 1 \end{cases}$

luego $\frac{1/2 - 3/2}{2-0} = \begin{cases} -c & \text{si } c < 1 \\ -1/c^2 & \text{si } c \geq 1 \end{cases}$

De la primera ecuación se obtiene: $-1/2 = -c \Rightarrow c = ½ \in (0,2) \Rightarrow$ Una solución válida c = 1/2

Y de la segunda ecuación: $-1/2 = -1/c^2 \Rightarrow c^2 = 2 \Rightarrow c = \sqrt{2} \in (0,2) \Rightarrow$ Otra solución válida $c = \sqrt{2}$

<u>EJERCICIO 24</u> : Aplica el teorema de Cauchy a las funciones $f(x) = x^2 - 2$; $g(x) = 3x^2 + x - 1$ en el intervalo [0,4]

Solución:
Las funciones son continuas y derivables por tratarse de funciones polinómica, por tanto,

$f'(x) = 2x$; $f'(c) = 2c$

$g'(x) = 6x + 1$; $g'(c) = 6c + 1$

Valores de las funciones en los extremos de los intervalos:

$f(0) = -2$; $f(4) = 14$

$g(0) = -1$; $g(4) = 51$

Entonces, $\frac{14-(-2)}{51-(-1)} = \frac{2c}{6c+1} \Rightarrow \frac{16}{52} = \frac{2c}{6c+1} \Rightarrow \frac{4}{13} = \frac{2c}{6c+1}$

es decir, $24c + 4 = 26c \Rightarrow 2c = 4 \Rightarrow c = 2 \in (0,4)$

La tesis se verifica en c = 2