Halla los puntos singulares de:

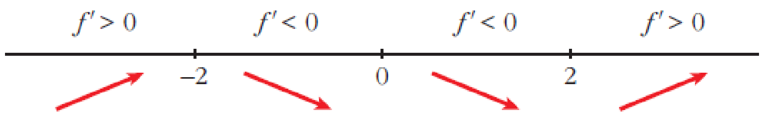
a) $y = 3x^5 - 20x^3$ **b)** $y = \dfrac{x^2}{x^2 - 1}$ **c)** $y = \dfrac{x^3}{(x-2)^2}$ **d)** $y = \sqrt{x^2 - 2x}$

a) $y = 3x^5 - 20x^3$. *Dominio* = $\mathbb{R}$

$f'(x) = 15x^4 - 60x^2$

$$f'(x) = 0 \rightarrow 15x^2(x^2 - 4) = 0 \left\langle \begin{array}{l} x = 0 \\ x = -2 \\ x = 2 \end{array} \right.$$

Signo de $f'(x)$:



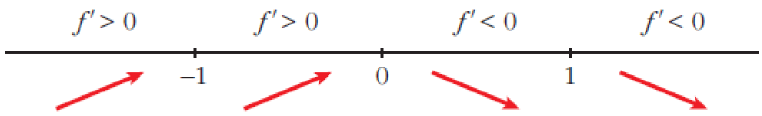
Hay un máximo en $(-2, 64)$, un mínimo en $(2, -64)$, y un punto de inflexión en $(0, 0)$.

b) $y = \dfrac{x^2}{x^2 - 1}$. *Dominio* = $\mathbb{R} - \{-1, 1\}$

$$f'(x) = \frac{2x(x^2 - 1) - x^2 \cdot 2x}{(x^2 - 1)^2} = \frac{2x^3 - 2x - 2x^3}{(x^2 - 1)^2} = \frac{-2x}{(x^2 - 1)^2}$$

$f'(x) = 0 \rightarrow -2x = 0 \rightarrow x = 0$

Signo de $f'(x)$:



Hay un máximo en $(0, 0)$.

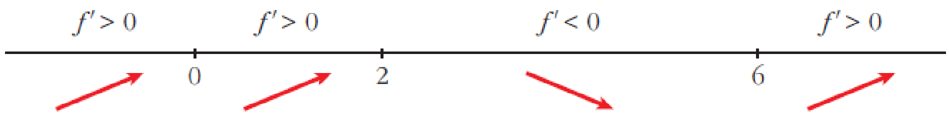
c) $y = \dfrac{x^3}{(x-2)^2}$. *Dominio* = $\mathbb{R} - \{2\}$

$$f'(x) = \frac{3x^2(x-2)^2 - x^3 \cdot 2(x-2)}{(x-2)^4} = \frac{3x^2(x-2) - 2x^3}{(x-2)^3} =$$

$$= \frac{3x^3 - 6x^2 - 2x^3}{(x-2)^3} = \frac{x^3 - 6x^2}{(x-2)^3}$$

$$f'(x) = 0 \rightarrow x^2(x - 6) = 0 \left\langle \begin{array}{l} x = 0 \\ x = 6 \end{array} \right.$$

Signo de $f'(x)$:



Hay un punto de inflexión en $(0, 0)$ y un mínimo en $\left(6, \dfrac{27}{2}\right)$.

d) $y = \sqrt{x^2 - 2x}$. *Dominio* = $(-\infty, 0] \cup [2, +\infty)$

$$f'(x) = \frac{2x - 2}{2\sqrt{x^2 - 2x}} = \frac{x - 1}{\sqrt{x^2 - 2x}}$$

$f'(x) = 0 \quad \rightarrow \quad x - 1 = 0 \quad \rightarrow \quad x = 1 \notin$ *Dominio.*

No hay puntos singulares.

Representa:

a) $y = \dfrac{x^3}{1 - x^2}$ **b)** $y = \dfrac{x^2 - 2x - 8}{x}$

a) $y = \dfrac{x^3}{1 - x^2} = -x + \dfrac{x}{1 - x^2}$. *Dominio* = $\mathbb{R} - \{-1, 1\}$

- **Simetrías:**

  $f(-x) = \dfrac{-x^3}{1 - x^2} = -f(x)$. Es impar: simétrica respecto al origen de coordenadas.

- **Asíntotas verticales:**

  $$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to -1^-} f(x) = +\infty \\ \lim\limits_{x \to -1^+} f(x) = -\infty \end{array}\right\} \text{Asíntota vertical en } x = -1.$$

  $$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = +\infty \\ \lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = -\infty \end{array}\right\} \text{Asíntota vertical en } x = 1.$$

- **Asíntota oblicua:**

  $\dfrac{x^3}{1 - x^2} = -x + \dfrac{x}{1 - x^2} \quad \to \quad y = -x$ es asíntota oblicua.

  Posición de la curva respecto a la asíntota:

  $f(x) - (-x) > 0$ si $x \to -\infty$ (curva por encima)

  $f(x) - (-x) < 0$ si $x \to +\infty$ (curva por debajo)

- **Puntos singulares:**

  $$f'(x) = \frac{3x^2(1 - x^2) - x^3 \cdot (-2x)}{(1 - x^2)^2} = \frac{3x^2 - 3x^4 + 2x^4}{(1 - x^2)^2} = \frac{-x^4 + 3x^2}{(1 - x^2)^2}$$

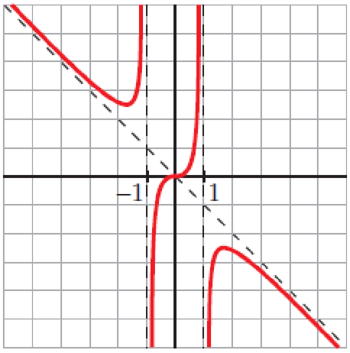
  $$f'(x) = 0 \quad \to \quad x^2(-x^2 + 3) = 0 \quad \begin{cases} x = 0 \\ x = -\sqrt{3} \\ x = \sqrt{3} \end{cases}$$

  Puntos: $(0, 0)$; $\left(-\sqrt{3}, \dfrac{3\sqrt{3}}{2}\right)$; $\left(\sqrt{3}, -\dfrac{3\sqrt{3}}{2}\right)$

- **Cortes con los ejes:**

  Corta a los ejes en $(0, 0)$.

- **Gráfica:**



b) $y = \dfrac{x^2 - 2x - 8}{x} = x - 2 - \dfrac{8}{x}$. *Dominio* = $\mathbb{R} - \{0\}$

- **Simetrías:**

$f(-x) = \dfrac{x^2 + 2x - 8}{-x}$.

No es par ni impar: no es simétrica respecto al eje Y, ni respecto al orige

- **Asíntotas verticales:**

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = +\infty \\ \lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = -\infty \end{array}\right\} \text{Asíntota vertical en } x = 0.$$

- **Asíntota oblicua:**

$\dfrac{x^2 - 2x - 8}{x} = x - 2 - \dfrac{8}{x} \rightarrow y = x - 2$ es asíntota oblicua.

Posición de la curva respecto a la asíntota:

$f(x) - (x - 2) > 0$ si $x \to -\infty$ (curva por encima)

$f(x) - (x - 2) < 0$ si $x \to +\infty$ (curva por debajo)

- **Puntos singulares:**

$f'(x) = 1 + \dfrac{8}{x^2} > 0$ para todo x del dominio.

La función es creciente en todo su dominio. No tiene puntos singulares.

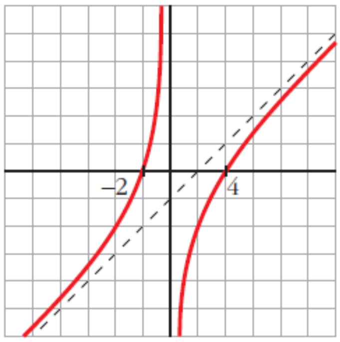
- **Cortes con los ejes:**

— Con el eje $X \rightarrow y = 0 \rightarrow x^2 - 2x - 8 = 0$ $\begin{cases} x = -2 \\ x = 4 \end{cases}$

Puntos: $(-2, 0)$ y $(4, 0)$

— No corta el eje Y, pues no está definida en $x = 0$.

- **Gráfica:**



Representa:

a) $y = \dfrac{x^2 - 9}{x^2 - 4}$ **b)** $y = \dfrac{x^3 + 2x}{x^2 + 1}$

a) $y = \dfrac{x^2 - 9}{x^2 - 4}$. *Dominio* = $\mathbb{R} - \{-2, 2\}$

- **Simetrías:**

$f(-x) = \dfrac{x^2 - 9}{x^2 - 4} = f(x)$. Es par: simétrica respecto al eje *Y*.

- **Asíntotas verticales:**

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to -2^-} f(x) = -\infty \\ \lim\limits_{x \to -2^+} f(x) = +\infty \end{array}\right\} \text{Asíntota vertical en } x = -2.$$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = +\infty \\ \lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = -\infty \end{array}\right\} \text{Asíntota vertical en } x = 2.$$

- **Asíntota horizontal:**

$\dfrac{x^2 - 9}{x^2 - 4} = 1 - \dfrac{5}{x^2 - 4} \quad \to \quad y = 1$ es asíntota horizontal.

Posición de la curva respecto a la asíntota:

$f(x) - 1 < 0$ si $x \to -\infty$ (curva por debajo)

$f(x) - 1 < 0$ si $x \to +\infty$ (curva por debajo)

- **Puntos singulares:**

$$f'(x) = \frac{2x(x^2 - 4) - 2x(x^2 - 9)}{(x^2 - 4)^2} = \frac{2x(x^2 - 4 - x^2 + 9)}{(x^2 - 4)^2} = \frac{10x}{(x^2 - 4)^2}$$

$f'(x) = 0 \quad \to \quad 10x = 0 \quad \to \quad x = 0 \quad \to$ Punto: $\left(0, \dfrac{9}{4}\right)$

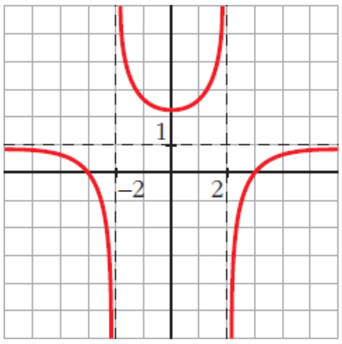
- **Cortes con los ejes:**

— Con el eje $Y \rightarrow x = 0 \rightarrow y = \frac{9}{4} \rightarrow$ Punto: $\left(0, \frac{9}{4}\right)$

— Con el eje $X \rightarrow y = 0 \rightarrow x^2 - 9 = 0 \begin{cases} x = -3 \\ x = 3 \end{cases}$

Puntos: $(-3, 0)$ y $(3, 0)$.

- **Gráfica:**



b) $y = \dfrac{x^3 + 2x}{x^2 + 1}$. *Dominio* = $\mathbb{R}$

- **Simetrías:**

$f(-x) = \dfrac{-x^3 - 2x}{x^2 + 1} = -f(x)$. Es impar: simétrica respecto al origen de coordenadas.

- **No tiene asíntotas verticales.**

- **Asíntota oblicua:**

$\dfrac{x^3 + 2x}{x^2 + 1} = x + \dfrac{x}{x^2 + 1} \rightarrow y = x$ es asíntota oblicua.

Posición de la curva respecto a la asíntota:

$f(x) - x < 0$ si $x \rightarrow -\infty$ (curva por debajo)

$f(x) - x > 0$ si $x \rightarrow +\infty$ (curva por encima)

- **Puntos singulares:**

$$f'(x) = \frac{(3x^2 + 2)(x^2 + 1) - (x^3 + 2x) \cdot 2x}{(x^2 + 1)^2} = \frac{3x^4 + 3x^2 + 2x^2 + 2 - 2x^4 - 4x^2}{(x^2 + 1)^2} =$$

$$= \frac{x^4 + x^2 + 2}{(x^2 + 1)^2}$$

$f'(x) = 0 \rightarrow x^4 + x^2 + 2 = 0 \rightarrow x^2 = \dfrac{-1 \pm \sqrt{1 - 8}}{2} \rightarrow$ No tiene solución.

No hay puntos singulares.

- **Cortes con los ejes:**

  — Con el eje $Y \;\rightarrow\; x = 0 \;\rightarrow\; y = 0 \;\rightarrow\;$ Punto: $(0, 0)$

  — Con el eje $X \;\rightarrow\; y = 0 \;\rightarrow\; x^3 + 2x = 0 \;\rightarrow\; x(x^2 + 2) = 0 \;\rightarrow$

  $\rightarrow\; x = 0 \;\rightarrow\;$ Punto: $(0, 0)$

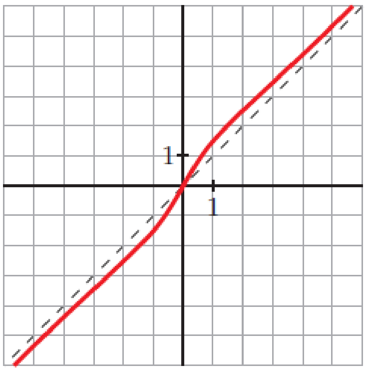
- **Puntos de inflexión:**

$$f''(x) = \frac{(4x^3 + 2x)(x^2 + 1)^2 - (x^4 + x^2 + 2) \cdot 2(x^2 + 1) \cdot 2x}{(x^2 + 1)^4} =$$

$$= \frac{(4x^3 + 2x)(x^2 + 1) - 4x(x^4 + x^2 + 2)}{(x^2 + 1)^3} = \frac{2x^3 - 6x}{(x^2 + 1)^3} = \frac{2x(x^2 - 3)}{(x^2 + 1)^3}$$

$$f''(x) = 0 \left\langle \begin{array}{l} x = 0 \\ x = -\sqrt{3} \\ x = \sqrt{3} \end{array} \right\} \text{ Puntos: } (0, 0); \left(-\sqrt{3}, -\frac{5\sqrt{3}}{4}\right); \left(\sqrt{3}, \frac{5\sqrt{3}}{4}\right)$$

- **Gráfica:**



Representa:

a) $y = \sqrt{x^2 + 2x}$

b) $y = \sqrt{x^2 - 9}$

a) $y = \sqrt{x^2 + 2x}$

- **Dominio:**

$$x^2 + 2x = 0 \;\rightarrow\; x(x + 2) = 0 \left\langle \begin{array}{l} x = 0 \\ x = -2 \end{array} \right.$$

  Dominio $= (-\infty, -2] \cup [0, +\infty)$

- **Simetrías:**

  $f(-x) = \sqrt{x^2 - 2x}$. No es par ni impar: no es simétrica respecto al eje Y ni respecto al origen de coordenadas.

- **No tiene asíntotas verticales.**

- **Asíntotas oblicuas:**

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to -\infty} \frac{\sqrt{x^2 + 2x}}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{\sqrt{x^2 - 2x}}{-x} = -1$$

$$\lim_{x \to -\infty} [f(x) + x] = \lim_{x \to -\infty} [\sqrt{x^2 + 2x} + x] = \lim_{x \to +\infty} [\sqrt{x^2 - 2x} - x] =$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{(\sqrt{x^2 - 2x} - x)(\sqrt{x^2 - 2x} + x)}{\sqrt{x^2 - 2x} + x} =$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{x^2 - 2x - x^2}{\sqrt{x^2 - 2x} + x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{-2x}{\sqrt{x^2 - 2x} + x} =$$

$$= \frac{-2}{1 + 1} = \frac{-2}{2} = -1$$

$y = -x - 1$ es asíntota oblicua cuando $x \to -\infty$.

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{\sqrt{x^2 + 2x}}{x} = 1$$

$$\lim_{x \to +\infty} [f(x) - x] = \lim_{x \to +\infty} [\sqrt{x^2 + 2x} - x] =$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{(\sqrt{x^2 + 2x} - x)(\sqrt{x^2 + 2x} + x)}{\sqrt{x^2 + 2x} + x} =$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{x^2 + 2x - x^2}{\sqrt{x^2 + 2x} + x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{2x}{\sqrt{x^2 + 2x} + x} =$$

$$= \frac{2}{1 + 1} = \frac{2}{2} = 1$$

$y = x + 1$ es asíntota oblicua cuando $x \to +\infty$.

- **Puntos singulares:**

$$f'(x) = \frac{2x + 2}{2\sqrt{x^2 + 2x}} = \frac{x + 1}{\sqrt{x^2 + 2x}}$$

$f'(x) = 0 \quad \to \quad x + 1 = 0 \quad \to \quad x = -1$

Como no pertenece al dominio de $f(x)$, no hay puntos singulares.

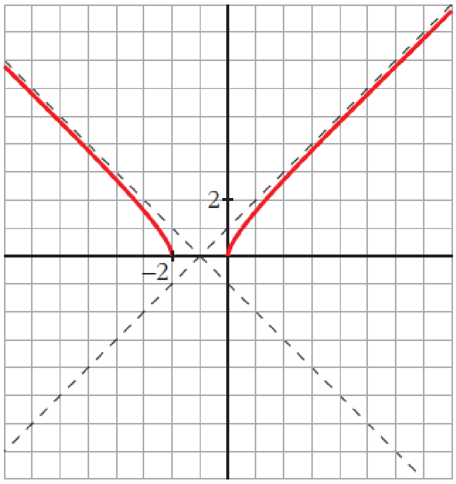
- **Cortes con los ejes:**

— Con el eje $X \to y = 0 \to \sqrt{x^2 + 2x} \to x^2 + 2x = 0 \begin{cases} x = 0 \\ x = -2 \end{cases}$

Puntos: $(0, 0)$ y $(-2, 0)$

— Con el eje $Y \to x = 0 \to y = 0 \to$ Punto: $(0, 0)$

- **Gráfica:**



b) $y = \sqrt{x^2 - 9}$

- **Dominio:**

$x^2 - 9 = 0 \begin{cases} x = -3 \\ x = 3 \end{cases}$

Dominio $= (-\infty, -3] \cup [3, +\infty)$

- **Simetrías:**

$f(-x) = \sqrt{x^2 - 9} = f(x)$. Es par: simétrica respecto al eje Y.

- **No tiene asíntotas verticales.**

- **Asíntotas oblicuas:**

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to -\infty} \frac{\sqrt{x^2 - 9}}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{\sqrt{x^2 - 9}}{-x} = -1$$

$$\lim_{x \to -\infty} [f(x) + x] = \lim_{x \to -\infty} [\sqrt{x^2 - 9} + x] = \lim_{x \to +\infty} [\sqrt{x^2 - 9} - x] =$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{(\sqrt{x^2 - 9} - x)(\sqrt{x^2 - 9} + x)}{(\sqrt{x^2 - 9} + x)} =$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{x^2 - 9 - x^2}{\sqrt{x^2 - 9} + x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{-9}{\sqrt{x^2 - 9} + x} = 0$$

$y = -x$ es asíntota oblicua cuando $x \to -\infty$.

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{\sqrt{x^2 - 9}}{x} = 1$$

$$\lim_{x \to +\infty} [f(x) - x] = \lim_{x \to +\infty} [\sqrt{x^2 - 9} - x] = \lim_{x \to +\infty} \frac{(\sqrt{x^2 - 9} - x)(\sqrt{x^2 - 9} + x)}{(\sqrt{x^2 - 9} + x)} =$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{x^2 - 9 - x^2}{\sqrt{x^2 - 9} + x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{-9}{\sqrt{x^2 - 9} + x} = 0$$

$y = x$ es asíntota oblicua cuando $x \to +\infty$.

- **Puntos singulares:**

$$f'(x) = \frac{2x}{2\sqrt{x^2 - 9}} = \frac{x}{\sqrt{x^2 - 9}}$$

$f'(x) = 0 \quad \to \quad x = 0$

Como no pertenece al dominio de $f(x)$, no hay puntos singulares.

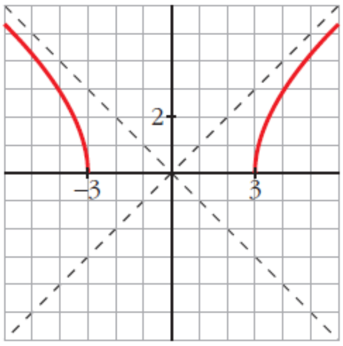
- **Cortes con los ejes:**

— Con el eje X $\to$ $y = 0$ $\to$ $\sqrt{x^2 - 9}$ $\to$ $x^2 - 9 = 0$ $\begin{cases} x = -3 \\ x = 3 \end{cases}$

Puntos: $(-3, 0)$ y $(3, 0)$

— No corta al eje Y, pues no existe $f(0)$.

- **Gráfica:**



2. Representa:

a) $y = ln(x^2 + 4)$ **b)** $y = ln(x^2 - 1)$

a) $y = ln\ (x^2 + 4)$

- **Dominio:**

Como $x^2 + 4 > 0$ para todo x, $Dominio = \mathbb{R}$.

- **Simetrías:**

$f(-x) = ln\ (x^2 + 4) = f(x)$. Es par: simétrica respecto al eje Y.

- **No tiene asíntotas verticales.**

- **Ramas infinitas:**

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{ln\,(x^2 + 4)}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{\frac{2x}{x^2 + 4}}{1} = 0$$

Por tanto, no tiene asíntotas de ningún tipo.

Tiene ramas parabólicas.

- **Puntos singulares:**

$$f'(x) = \frac{2x}{x^2 + 4}$$

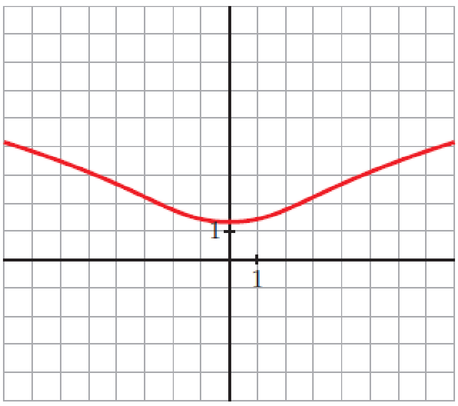
$$f'(x) = 0 \;\rightarrow\; 2x = 0 \;\rightarrow\; x = 0 \;\rightarrow\; \text{Punto: } (0,\, ln\ 4)$$

- **Puntos de inflexión:**

$$f''(x) = \frac{2(x^2 + 4) - 2x \cdot 2x}{(x^2 + 4)^2} = \frac{2x^2 + 8 - 4x^2}{(x^2 + 4)^2} = \frac{8 - 2x^2}{(x^2 + 4)^2}$$

$$f''(x) = 0 \;\rightarrow\; 8 - 2x^2 = 0 \left\langle \begin{array}{l} x = -2 \\ x = 2 \end{array} \right\} \text{Puntos: } (-2,\, ln\ 8) \text{ y } (2,\, ln\ 8)$$

- **Gráfica:**



b) $y = ln\,(x^2 - 1)$

- **Dominio:**

$x^2 - 1 > 0 \;\rightarrow\; Dominio = (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$

- **Simetrías:**

$f(-x) = ln\,(x^2 - 1) = f(x)$. Es par: simétrica respecto al eje Y.

- **Asíntotas verticales:**

  $\lim_{x \to -1^-} f(x) = -\infty; \quad \lim_{x \to 1^+} f(x) = -\infty$

  $x = -1$ y $x = 1$ son asíntotas verticales.

- $\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

  $$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{ln\,(x^2 - 1)}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{\frac{2x}{x^2 - 1}}{1} = 0$$

  Tiene ramas parabólicas.

- **Puntos singulares:**

  $f'(x) = \dfrac{2x}{x^2 - 1}$

  $f'(x) = 0 \;\to\; 2x = 0 \;\to\; x = 0$

  No tiene puntos singulares, pues la función no está definida en $x = 0$.

- **Puntos de inflexión:**

  $$f''(x) = \frac{2(x^2 - 1) - 2x \cdot 2x}{(x^2 - 1)^2} = \frac{2x^2 - 2 - 4x^2}{(x^2 - 1)^2} = \frac{-2x^2 - 2}{(x^2 - 1)^2}$$

  No tiene puntos de inflexión.

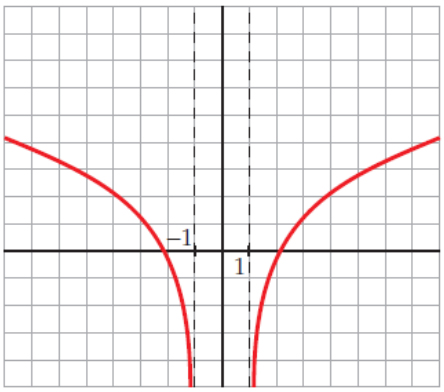
- **Puntos de corte con los ejes:**

  — Con el eje X $\to$ $y = 0$ $\to$ $ln\,(x^2 - 1) = 0$ $\to$ $x^2 - 1 = 1$

  $$x^2 = 2 \left< \begin{matrix} x = -\sqrt{2} \\ x = \sqrt{2} \end{matrix} \right\} \text{ Puntos: } (-\sqrt{2}, 0) \text{ y } (\sqrt{2}, 0)$$

  — No corta al eje Y, pues no existe $f(0)$.

- **Gráfica:**



Representa:

a) $y = \dfrac{e^x}{x^2}$ **b)** $y = \dfrac{e^{-x}}{-x}$ **c)** $y = \dfrac{1}{2}\cos 2x + \cos x$

a) $y = \dfrac{e^x}{x^2}$

- **Dominio:** $D = \mathbb{R} - \{0\}$
- **No es simétrica.**
- **Asíntotas verticales:**

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = +\infty \\ \lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = +\infty \end{array}\right\} \text{Asíntota vertical: } x = 0$$

- $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 0$. Además, $f(x) > 0$ para todo x del dominio.

  $y = 0$ es una asíntota horizontal cuando $x \to -\infty$.

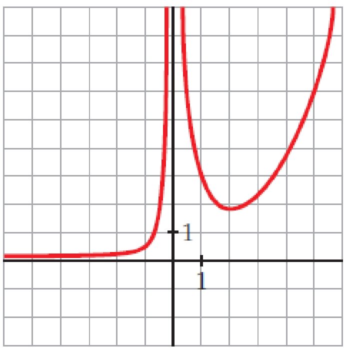
  $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$; $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x} = +\infty$. Rama parabólica.

- **Puntos singulares:**

$$f'(x) = \frac{e^x \cdot x^2 - e^x \cdot 2x}{x^4} = \frac{x \cdot e^x(x-2)}{x^4} = \frac{e^x(x-2)}{x^3}$$

$$f'(x) = 0 \quad \to \quad x = 2 \quad \to \quad \text{Punto } \left(2, \frac{e^2}{4}\right)$$

- **Gráfica:**



b) $y = \dfrac{e^{-x}}{-x}$

- **Dominio**: $D = \mathbb{R} - \{0\}$
- **No es simétrica.**

- **Asíntotas verticales:**

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = +\infty \\ \lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = +\infty \end{array}\right\} \text{Asíntota vertical: } x = 0$$

- $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$; $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{f(x)}{x} = -\infty$. Rama parabólica.

  $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$. $f(x) < 0$ para todo x positivo.

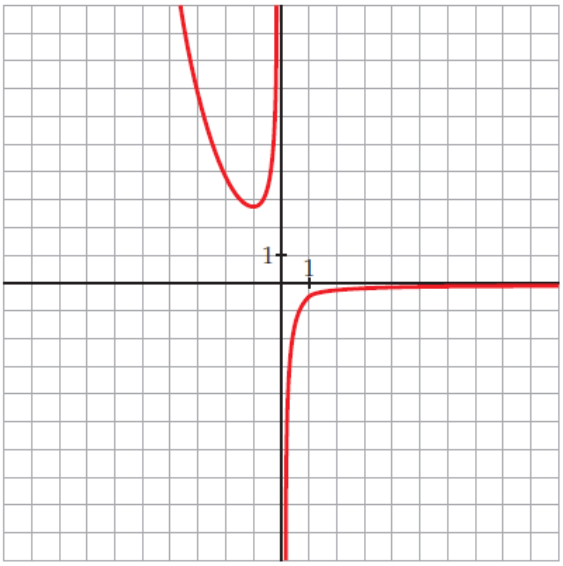
  $y = 0$ es una asíntota horizontal cuando $x \to +\infty$.

- **Puntos singulares:**

  $$f'(x) = \frac{-e^{-x} \cdot (-x) - e^{-x} \cdot (-1)}{(-x)^2} = \frac{e^{-x}(x+1)}{x^2}$$

  $f'(x) = 0 \;\to\; x = -1 \;\to\;$ Punto: $(-1, -e)$

- **Gráfica:**



c) $y = \dfrac{1}{2} \cos 2x + \cos x$

- El período de $\cos x$ es 2π y el de $sen\ 2x$ es π. Por tanto, la función es periódica de período 2π. La estudiamos solo en este intervalo.

- Es **derivable** en todo $\mathbb{R}$ (es suma de funciones derivables).

- **Puntos singulares:**

  $f'(x) = -sen\ 2x - sen\ x = -2sen\ x \cos x - sen\ x = -sen\ x\,(2\cos x + 1)$

  $$f'(x) = 0 \;\to\; -sen\ x(2\cos x + 1) = 0 \left\langle \begin{array}{l} sen\ x = 0 \\ \cos x = -\dfrac{1}{2} \end{array}\right.$$

$$sen\,x = 0 \left\langle \begin{array}{l} x = 0 \;\rightarrow\; \text{Punto: } \left(0, \dfrac{3}{2}\right) \\[2ex] x = \pi \;\rightarrow\; \text{Punto: } \left(\pi, -\dfrac{1}{2}\right) \end{array} \right.$$

$$cos\,x = -\frac{1}{2} \left\langle \begin{array}{l} x = \dfrac{2\pi}{3} \;\rightarrow\; \text{Punto: } \left(\dfrac{2\pi}{3}, -\dfrac{3}{4}\right) \\[2ex] x = \dfrac{4\pi}{3} \;\rightarrow\; \text{Punto: } \left(\dfrac{4\pi}{3}, -\dfrac{3}{4}\right) \end{array} \right.$$

- **Puntos de corte con los ejes:**

— Con el eje $Y \rightarrow x = 0 \rightarrow y = \frac{3}{2} \rightarrow$ Punto: $\left(0, \frac{3}{2}\right)$

— Con el eje $X \rightarrow y = 0 \rightarrow cos\,2x + 2cos\,x = 0$

$$cos^2\,x - sen^2\,x + 2cos\,x = 0$$

$$cos^2\,x - (1 - cos^2\,x) + 2cos\,x = 0$$

$$cos^2\,x - 1 + cos^2\,x + 2cos\,x = 0$$

$$2cos^2\,x + 2cos\,x - 1 = 0$$

$$cos\,x = \frac{-2 \pm \sqrt{4+8}}{4} \left\langle \begin{array}{l} cos\,x = 0{,}366 \\ cos\,x = -1{,}366 \text{ (no vale)} \end{array} \right.$$

$$cos\,x = 0{,}366 \left\langle \begin{array}{l} x = 1{,}2 \\ x = 5{,}09 \end{array} \right.$$

Puntos: (1,2; 0); (5,09; 0)

- **Puntos de inflexión:**

$f''(x) = -2cos\,2x - cos\,x$

$f''(x) = 0 \rightarrow -2cos\,2x - cos\,x = 0$

$$-2(cos^2\,x - sen^2\,x) - cos\,x = 0$$

$$-2cos^2\,x + 2sen^2\,x - cos\,x = 0$$

$$-2cos^2\,x + 2(1 - cos^2\,x) - cos\,x = 0$$

$$-2cos^2\,x + 2 - 2cos^2\,x - cos\,x = 0$$

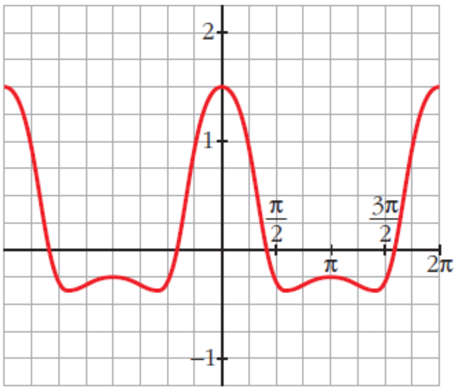
$$-4cos^2\,x - cos\,x + 2 = 0$$

$$cos\,x = \frac{1 \pm \sqrt{1+32}}{-8} \left\langle \begin{array}{l} cos\,x = -0{,}843 \\ cos\,x = 0{,}593 \end{array} \right.$$

$$\cos x = -0{,}843 \begin{cases} x = 2{,}57 \\ x = 3{,}71 \end{cases} \qquad \cos x = 0{,}593 \begin{cases} x = 0{,}94 \\ x = 5{,}35 \end{cases}$$

Puntos: (2,57; –0,63)
(3,71; –0,63)
(0,94; 0,44)
(5,35; 0,45)

- **Gráfica:**



Dada la función $f(x) = \dfrac{x + 1}{\sqrt{x^2 + 1}}$, **se pide:**

a) Dominio de definición, asíntotas y posición de la curva respecto de estas.

b) Máximos y mínimos relativos, e intervalos de crecimiento y de decrecimiento.

c) Dibuja la gráfica de f.

a) • **Dominio:** $\mathbb{R}$ (porque $x^2 + 1 > 0$ para todo x).

• **Asíntotas:**

No tiene asíntotas verticales porque el denominador no se anula para ningún valor de x.

Asíntotas horizontales:

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{x + 1}{\sqrt{x^2 + 1}} = \lim_{x \to +\infty} \frac{-x + 1}{\sqrt{x^2 + 1}} = -1$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x + 1}{\sqrt{x^2 + 1}} = 1$$

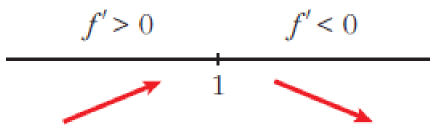
$y = -1$ es asíntota horizontal cuando $x \to -\infty$ $(f(x) > -1)$.

$y = 1$ es asíntota horizontal cuando $x \to +\infty$ $(f(x) > 1)$.

b) $$f'(x) = \frac{\sqrt{x^2 + 1} - (x + 1) \cdot \dfrac{2x}{2\sqrt{x^2 + 1}}}{(x^2 + 1)} = \frac{x^2 + 1 - x^2 - x}{\sqrt{(x^2 + 1)^3}} = \frac{1 - x}{\sqrt{(x^2 + 1)^3}}$$

$f'(x) = 0 \quad \rightarrow \quad 1 - x = 0 \quad \rightarrow \quad x = 1$

Signo de $f'(x)$:

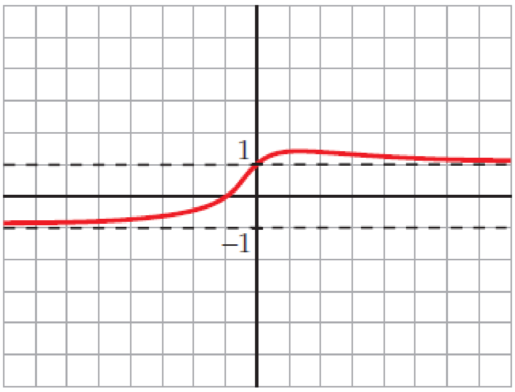


$f(x)$ es creciente en $(-\infty, 1)$.

es decreciente en $(1, +\infty)$.

tiene un máximo en $(1, \sqrt{2})$.

c)



$$y = x + \frac{4}{(x-1)^2}$$

- **Dominio:** $\mathbb{R} - \{1\}$

- **Asíntotas:**

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = +\infty \\ \lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = +\infty \end{array}\right\} \quad x = 1 \text{ es asíntota vertical.}$$

$y = x$ es asíntota oblicua.

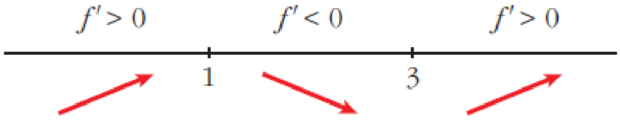
(Si $x \to -\infty$, $f(x) > x$; si $x \to +\infty$, $f(x) > x$).

- **Crecimiento, decrecimiento, extremos relativos:**

$$f'(x) = 1 - \frac{8}{(x-1)^3} = \frac{(x-1)^3 - 8}{(x-1)^3}$$

$f'(x) = 0 \;\to\; (x-1)^3 = 8 \;\to\; x - 1 = 2 \;\to\; x = 3$

Signo de $f'(x)$:

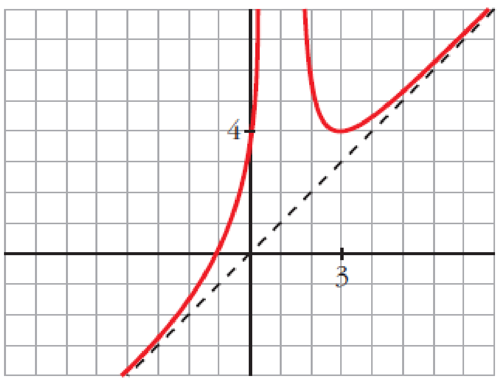


$f(x)$ es creciente en $(-\infty, 1) \cup (3, +\infty)$.

es decreciente en $(1, 3)$.

tiene un mínimo en $(3, 4)$.

- **Gráfica:**



Estudia los máximos, los mínimos y los puntos de inflexión de las siguientes funciones y represéntalas gráficamente:

a) $y = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$ **b)** $y = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$ **c)** $y = sen\ x + cos\ x$ **para** $0 \le x \le 2\pi$

a) $y = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2} = senh\ x$. Esta función se denomina seno hiperbólico de x.

- $f'(x) = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$

  $f'(x) = 0 \rightarrow e^x + e^{-x} = 0 \rightarrow$ no tiene solución $\rightarrow$

  $\rightarrow$ no hay máximos ni mínimos

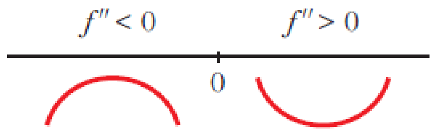
  $f'(x) > 0$ para todo $x \rightarrow f(x)$ es creciente

- $f''(x) = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$

  $f''(x) = 0 \rightarrow e^x - e^{-x} = 0 \rightarrow e^x - \dfrac{1}{e^x} = 0 \rightarrow e^{2x} - 1 = 0 \rightarrow$

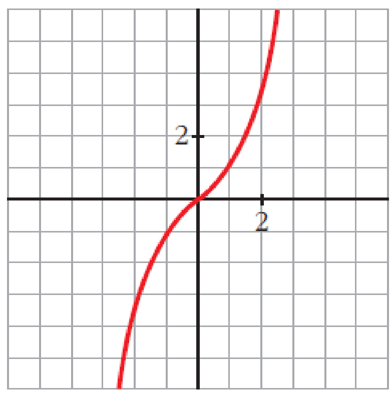
  $\rightarrow e^{2x} = 1 \rightarrow 2x = 0 \rightarrow x = 0 \rightarrow y = 0$

  Signo de $f''(x)$:

  Hay un punto de inflexión en $(0, 0)$.

- **Gráfica:**

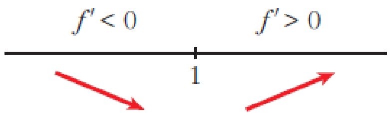


b) $y = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2} = cosh\ x$. Esta función se denomina coseno hiperbólico de x.

- $f'(x) = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$

  $f'(x) = 0 \ \rightarrow \ e^x - e^{-x} = 0 \ \rightarrow \ x = 0 \ \rightarrow \ y = 1$

  Signo de $f'(x)$:

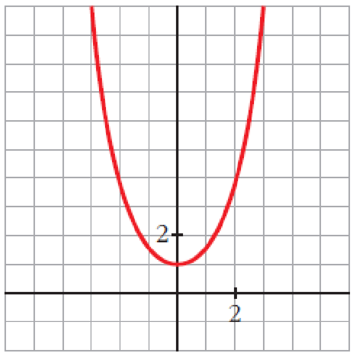


  Hay un mínimo en $(0, 1)$.

- $f''(x) = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$

  $f''(x) = 0 \ \rightarrow$ no tiene solución $\rightarrow$ no hay puntos de inflexión

- **Gráfica:**

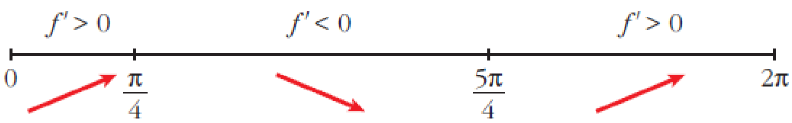


c) $y = sen\ x + cos\ x$ para $0 \le x \le 2\pi$

- $f'(x) = cos\ x - sen\ x$

  $f'(x) = 0 \ \rightarrow \ cos\ x = sen\ x \ \rightarrow \ tg\ x = 1 \ \begin{cases} x = \dfrac{\pi}{4} \\ x = \dfrac{5\pi}{4} \end{cases}$

  Signo de $f'(x)$:

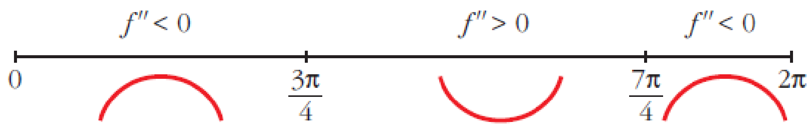


  Hay un máximo en $\left(\dfrac{\pi}{4}, \sqrt{2}\right)$ y un mínimo en $\left(\dfrac{5\pi}{4}, -\sqrt{2}\right)$.

- $f''(x) = -sen\ x - cos\ x$

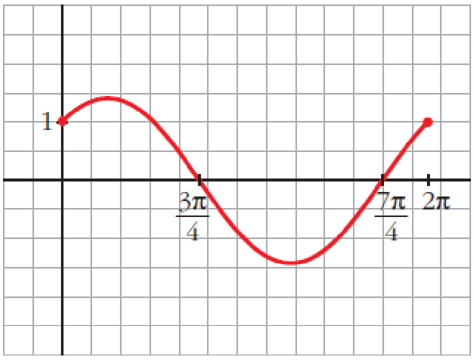
  $f''(x) = 0 \ \rightarrow \ sen\ x = -cos\ x \ \rightarrow \ tg\ x = -1 \ \begin{cases} x = \dfrac{3\pi}{4} \\ x = \dfrac{7\pi}{4} \end{cases}$

Signo de $f''(x)$:



Hay un punto de inflexión en $\left(\frac{3\pi}{4}, 0\right)$, y otro en $\left(\frac{7\pi}{4}, 0\right)$.

- **Gráfica:**



c) $y = x \ln x$

- **Dominio:** $(0, +\infty)$

- **Asíntotas:**

$$\lim_{x \to 0^+} x \ln x = \lim_{x \to 0^+} \frac{\ln x}{1/x} \overset{(1)}{=} \lim_{x \to 0^+} \frac{1/x}{-1/x^2} = \lim_{x \to 0^+} -x = 0$$

(1) Aplicamos la regla de L'Hôpital.

No tiene asíntotas verticales.

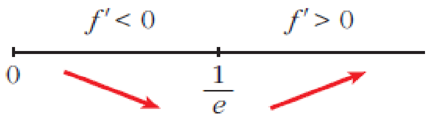
$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty; \quad \lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty \quad \to \quad \text{Rama parabólica}$$

- **Puntos singulares:**

$$f'(x) = \ln x + x \cdot \frac{1}{x} = \ln x + 1$$

$$f'(x) = 0 \quad \to \quad \ln x = -1 \quad \to \quad x = e^{-1} = \frac{1}{e}$$

Signo de $f'(x)$:

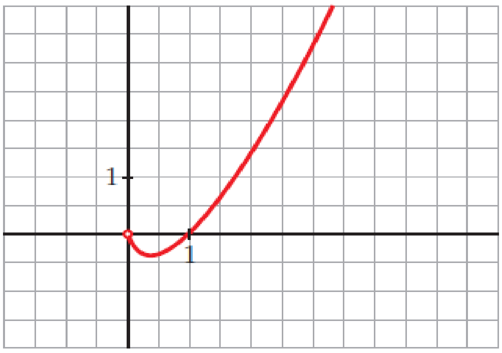


$f(x)$ es decreciente en $\left(0, \dfrac{1}{e}\right)$.

es creciente en $\left(\dfrac{1}{e}, +\infty\right)$.

tiene un mínimo en $\left(\dfrac{1}{e}, -\dfrac{1}{e}\right)$.

- Corta al eje X en $(1, 0)$.
- **Gráfica:**



d) $y = (x - 1)e^x$

- **Dominio:** $\mathbb{R}$
- **Asíntotas:**

No tiene asíntotas verticales.

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} (-x - 1)e^{-x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{-x - 1}{e^x} \overset{(1)}{=} \lim_{x \to +\infty} \frac{-1}{e^x} = 0$$

(1) Aplicamos la regla de L'Hôpital.

$y = 0$ es asíntota horizontal cuando $x \to -\infty$ ($f(x) < 0$).

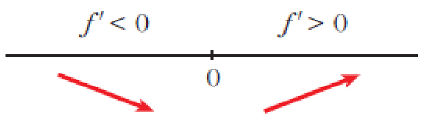
$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty; \quad \lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty \quad \to \quad \text{Rama parabólica}$$

- **Puntos singulares:**

$f'(x) = e^x + (x - 1)e^x = e^x(1 + x - 1) = xe^x$

$f'(x) = 0 \quad \to \quad x = 0$

Signo de $f'(x)$:



$f(x)$ es decreciente en $(-\infty, 0)$.

es creciente en $(0, +\infty)$.

tiene un mínimo en $(0, -1)$.

- Corta al eje X en $(1, 0)$.
- **Gráfica:**

g) $y = \dfrac{x^3}{\ln x}$

- **Dominio:**

$\ln x = 0 \quad \to \quad x = 1$. Además, ha de ser $x > 0$.

$Dom = (0, 1) \cup (1, +\infty)$

- **Asíntotas:**

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = 0$$

$$\left.\begin{aligned} \lim_{x \to 1^-} f(x) &= -\infty \\ \lim_{x \to 1^+} f(x) &= +\infty \end{aligned}\right\} \quad x = 1 \text{ es asíntota vertical.}$$

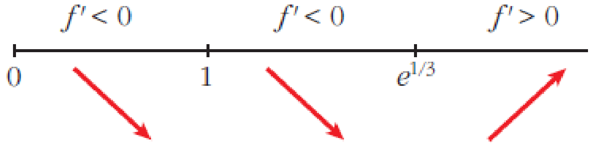
$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty; \quad \lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty \quad \to \quad \text{Rama parabólica}$$

- **Puntos singulares:**

$$f'(x) = \frac{3x^2 \ln x - x^3 \cdot (1/x)}{(\ln x)^2} = \frac{3x^2 \ln x - x^2}{(\ln x)^2} = \frac{x^2(3\ln x - 1)}{(\ln x)^2}$$

$$f'(x) = 0 \quad \to \quad x^2(3\ln x - 1) = 0 \quad \begin{cases} x = 0 \quad \text{(no vale)} \\ \ln x = 1/3 \quad \to \quad x = e^{1/3} \end{cases}$$

Signo de $f'(x)$:



$f(x)$ es decreciente en $(0, 1) \cup (1, e^{1/3})$.

es creciente en $(e^{1/3}, +\infty)$.

tiene un mínimo en $(e^{1/3}, 3e)$.

- **Gráfica:**